

Alumno _____

nº matrícula:

--	--	--	--

NORMAS DEL EXAMEN: 1) Cada ejercicio debe resolverse en la hoja del enunciado: no se admiten hojas adicionales. 2) Debe escribirse con tinta azul o negra: no se admite escritura a lápiz ni en color rojo. 3) El DNI del alumno debe estar a la vista sobre la mesa. 4) No está permitido levantarse ni hablar hasta que se hayan recogido los últimos ejercicios y se salga del aula de examen. 5) Se puede disponer sólo del Formulario oficial de la asignatura (sin informaciones adicionales de ningún tipo) y del papel en blanco para uso como borrador. 6) No se hacen aclaraciones.

Ejercicio nº 2.-A) Cuestión teórica: Si $\underline{\omega} = \omega^i \underline{g}_i$ es la expresión contravariante de un vector en la base general $\{\underline{g}_i\}$, deducir la expresión cova-covariante del tensor axial $\underline{W} = \underline{\omega} \times$ en dicha base, expresando la matriz $[w_{ij}]$ en función de los datos ω^i . [2 puntos]

B) Problema: Se considera el sistema de coordenadas esféricas $\{O; (r, \phi, \theta)\}$ (r = distancia al origen; ϕ = colatitud; θ = longitud) y su base física $\{\underline{e}_r, \underline{e}_\phi, \underline{e}_\theta\}$. Se pide

1) Calcular $\text{div}(\underline{e}_\phi)$ y $\text{rot}(\underline{e}_\phi)$ en componentes físicas esféricas. [2 ptos.]

2) Deducir justificadamente y disponer matricialmente los símbolos de Christoffel del sistema de coordenadas esféricas, solamente los necesarios para efectuar la derivación covariante que se pide en el apartado siguiente. [2 ptos.]

3) Si $\underline{T} = \underline{e}_r \times$, calcular $\frac{\partial \underline{T}}{\partial \phi}$ en componentes cova-covariantes esféricas. [4 ptos.]

Solución: A)

$$w_{ij} = \underline{g}_i \cdot (\underline{W} \cdot \underline{g}_j) = \underline{g}_i \cdot \underline{\omega} \times \underline{g}_j = \omega^k [\underline{g}_i, \underline{g}_k, \underline{g}_j] = \epsilon_{ikj} \sqrt{g} \omega^k = -e_{ijk} \omega^k$$

de donde

$$[w_{ij}] = \sqrt{g} \begin{bmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{bmatrix} \quad \#.$$

$$\text{B) 1) } \underline{e}_\phi = \frac{\underline{g}_\phi}{r} \Rightarrow \text{div}(\underline{e}_\phi) = \nabla \cdot \underline{e}_\phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial u^i} (\sqrt{g} v^i) \right] = \frac{1}{r^2 \sin \phi} \left[0 + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{r^2 \sin \phi}{r} \right) + 0 \right] = \frac{\cot \phi}{r}$$

$$\underline{e}_\phi = r \underline{g}^\phi \Rightarrow \text{rot}(\underline{e}_\phi) = \nabla \times \underline{e}_\phi = \frac{1}{r^2 \sin \phi} \begin{vmatrix} \underline{g}_r & \underline{g}_\phi & \underline{g}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 & r & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \phi} \underline{g}_\theta = \frac{1}{r^2 \sin \phi} r \sin \phi \underline{e}_\theta = \frac{1}{r} \underline{e}_\theta \quad \#.$$

2) Para calcular en el apartado 3) el tensor $\frac{\partial \underline{T}}{\partial \phi} := \underline{S}$ en componentes cova-cova, s_{ij} , se aplicará:

$$s_{ij} = t_{ij,2} = \partial_\phi t_{ij} - \Gamma_{i2}^h t_{hj} - \Gamma_{j2}^h t_{ih} \quad (*)$$

luego se necesitan los símbolos de la forma $[\Gamma_{i2}^k]$ (2º caja en el formulario). Para calcularlos se aplica:

$$\Gamma_{ij}^k = \underline{g}^k \cdot \frac{\partial \underline{g}_j}{\partial u^i} \Leftrightarrow [\Gamma_{i2}^k]_{k=f, i=c} = J^{-1} \cdot \frac{\partial J}{\partial \phi}$$

Reemplazando $J = \left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,\theta)} \right] = \begin{bmatrix} \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \end{bmatrix}$ y $J^{-1} = G^{-1} \cdot J^t$ y operando se obtiene la matriz

mencionada del formulario: $[\Gamma_{i2}^k] = \begin{bmatrix} 0 & -r & 0 \\ 1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cot \phi \end{bmatrix} \quad \#.$

3) Para aplicar (*) usaremos el apartado (A) para escribir la matriz cova-cova de $\underline{T}$, siendo $\underline{\omega} = \underline{e}_r = \underline{g}_r$:

$$\underline{e}_r \times \sim [t_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin \phi \\ 0 & r^2 \sin \phi & 0 \end{bmatrix}$$

Reemplazando en (*), operando y simplificando:

$$[s_{ij}] = \partial_\phi [t_{ij}] - [\Gamma_{i2}^h] t_{hj} - [t_{ih}] \cdot [\Gamma_{j2}^h] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r \sin \phi \\ 0 & 0 & 0 \\ -r \sin \phi & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \#.$$